H-119B
c.2.

Seasonal
Adjustment and
Time Series Staff

Groupe des méthodes de
désaisonnalisation et
des séries chronologiques

H-119B
C.2.

L'AJUSTEMENT DES SÉRIES INFRA-ANNUELLES AUX REPÈRES ANNUELS

par Pierre A. CHOLETTE
Statistique Canada

ADJUSTING SUB-ANNUAL SERIES TO YEARLY BENCHMARKS

by Pierre A. CHOLETTE
Statistics Canada

Recherche et analyse des chroniques
Édifice R.H. Coats, 25e étage
OTTAWA (Ontario), Canada
K1A 0T6

(613) 995-3126

Mai 1983

83-05-001B

Time Series Research and Analysis
R.H. Coats Building, 25th floor
Ottawa, Ontario, Canada
K1A 0T6

(613) 995-3126

May 1983

L'AJUSTEMENT DES SÉRIES INFRA-ANNUELLES AUX REPÈRES ANNUELS

par
Pierre A. CHOLETTE
Statistique Canada
OTTAWA, Canada, K1A 0T6

- résumé -

Ce travail propose une modification de la méthode d'étalonnage de Denton (1971) pour l'ajustement des séries infra-annuelles aux repères annuels. La série ajustée selon la méthode modifiée s'avère plus parallèle à la série non ajustée que ce n'est le cas avec la méthode originale. Des variantes additive et proportionnelle de la méthode sont exposées. Elles s'adaptent facilement aux séries de flux, de stock et d'indice. On trouve aussi quelques recommandations relatives à l'étalonnage préliminaire des données courantes et relatives au "gel" des estimés "historiques" de la série.

ADJUSTING SUB-ANNUAL SERIES TO YEARLY BENCHMARKDS

by
Pierre A. CHOLETTE
Statistics Canada
Ottawa, Canada, K1A 0T6

- abstract -

This paper proposes a modification to the method of Denton (1971) for adjusting sub-annual series to yearly benchmarks. The benchmarked series derived according to the modified method is more parallel to the unbenchmarked series than this is the case with the original method. An additive and a proportional variant of the method are presented. These can easily be adapted for flow, stock and index series. Also presented are a few recommendations about the preliminary benchmarking of current data and the "freezing" of "historical" estimates of the series.

INTRODUCTION

Dans un grand nombre de cas, le statisticien obtient des données infra-annuelles d'une série à partir d'une source de données (telle un échantillon); et, les valeurs annuelles repères correspondantes à partir d'une autre source de données plus fiable (telle un recensement). Ce travail reprend le problème de l'ajustement des séries infra-annuelles aux repères ou jalons annuels, c'est-à-dire le problème de l'étalonnage des séries chronologiques.

À notre connaissance, il ne s'est rien publié depuis 1971 (Denton, 1971) sur le sujet, même s'il s'agit d'un problème très fréquemment rencontré par les instituts de statistiques. Des auteurs, Chow et Lin h1971) ainsi que Somermyer, Jansen et Lauter (1976), ont traité d'un problème connexe, soit celui de la création ou de l'amélioration de données infra-annuelles à partir de jalons annuels mais aussi à partir de données infra-annuelles relatives à d'autres séries apparentées, ce qui est une autre histoire.

La solution proposée par Denton (1971) consiste à trouver une série infra-annuelle qui épouserait le plus possible le mouvement de la série infra-annuelle disponible et dont les sommes (ou moyennes) annuelles correspondraient aux repères annuels plus fiables. Le niveau de la série résultante serait ainsi donné par les repères annuels, tandis que son mouvement serait gouverné par la série infra-annuelle originale. Ce travail améliore la solution proposée par l'auteur, qui sous un rapport nous apparaît comme défectueuse: Contrairement à ce qui est prétendu, la série ajustée n'est généralement pas aussi parallèle que possible à la série originale.

INTRODUCTION

In many cases, the statistician obtains sub-annual data of a series from one source of data (e.g. a sample survey); and, the corresponding annual benchmark values from another source of data which is more reliable (e.g. a census). This paper resumes the problem of adjusting sub-annual series to annual benchmarks, that is the problem of benchmarking of time series.

To our knowledge, nothing has been published on the subject since 1971 (Denton, 1971), despite the fact that benchmarking is a problem very frequently encountered by statistical agencies. Some authors, Chow and Lin (1971) and Somermyer, Jansen and Lauter (1976), dealt with a related problem, namely that of creating or improving sub-annual data by means of annual benchmarks but also by means of sub-annual data pertaining to other related series, which is a different matter.

The solution proposed by Denton (1971) consists of finding a sub-annual series which would display the movement of the available sub-annual series as much as possible and whose annual sums (or averages) would match the more reliable annual benchmarks. The level of the resulting series would then be given by the annual benchmarks, whereas its movement would be dictated by the original sub-annual series. This paper improves the solution proposed by the author, which seems to us sub-optimal in one respect: Contrary to what is claimed the adjusted series is generally not as parallel as possible to the original series.

1. ILLUSTRATION DE LA MÉTHODE

La figure 1 montre les corrections ($x_t - z_t$) apportées à la série originale z_t selon la solution additive (avec premières différences) de Denton (courbe en tirets) et selon la solution correspondante proposée dans ce travail (continue). Évidemment, la série ajustée x_t sera tout à fait parallèle à la série originale si et seulement si les corrections sont constantes. Or dans la figure 1, les corrections associées à méthode de Denton varient tandis que celles associées à la méthode alternative sont constantes.

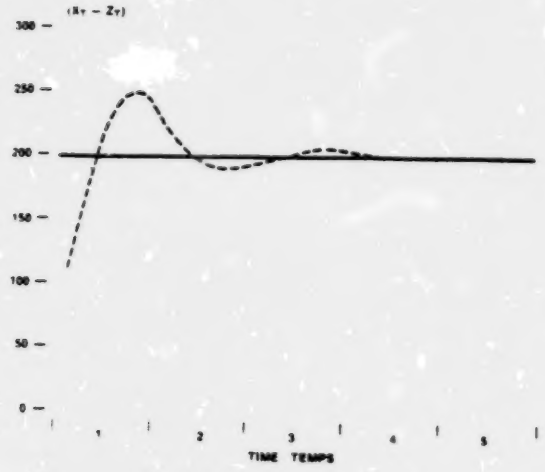

Figure 1: Corrections (x_t-z_t) apportées à la série non ajustée aux jalons selon la méthode de Denton (ligne en tirets) et selon la méthode d'étalonnage proposée dans ce travail (continue), en régime idéal d'écarts annuels constants

Figure 1: Corrections (x_t-z_t) made to the unbenchmarked series according to Denton's method (dashed curve) and according to the method proposed in this paper (solid) in an ideal situation of constant annual discrepancies

1. ILLUSTRATION OF THE RESULTS

Figure 1 shows the corrections ($x_t - z_t$) made to the original series z_t according to the additive solution (with first differences) of Denton (dashed curve) and according to the corresponding solution proposed in this paper (solid). Obviously, the adjusted series x_t will be completely parallel to the original series, if and only if the corrections are constant. In Figure 1, the corrections associated to the Denton method vary whereas those associated to the alternative method are constant.

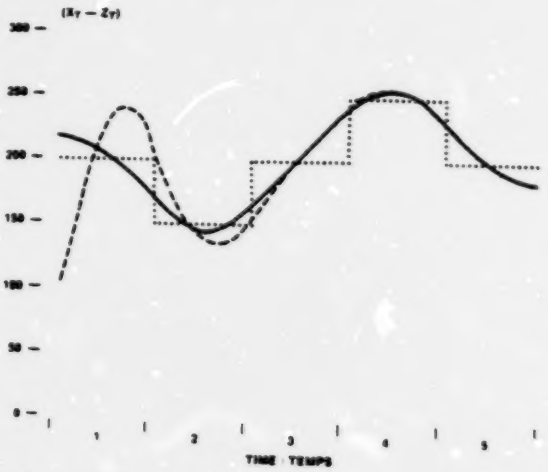

Figure 2: Corrections (x_t-z_t) made to the unbenchmarked series according to Denton's method (dashed curve) and according to the benchmarking method proposed in this paper (solid) in a situation of variable average annual discrepancies (dotted)

Figure 2: Corrections (x_t-z_t) apportées à la série non ajustée aux jalons selon la méthode de Denton (courbe en tirets) et selon la méthode d'étalonnage proposée dans ce travail (continue), en régime d'écarts annuels moyens variables (pointillée)

Il s'agissait d'un cas trivial qui admettait la solution des corrections constantes: tous les écarts annuels moyens, différences entre les jalons annuels et les totaux annuels de la série originale (divisées par le nombre de mois par année), étaient constants. Mais la figure 2 propose un cas plus réaliste, où les cinq écarts annuels moyens fluctuent autour de 200. Comme dans le premier exemple, les corrections calculées selon la méthode de Denton sont beaucoup moins constantes que celles obtenues avec l'autre méthode, surtout dans la première année.

Comme expliqué plus bas, la méthode de Denton minimise non seulement le changement dans les corrections mais aussi la taille de la première correction. Cela se vérifie dans les figures 1 et 2, où les premières corrections avoisinent zéro. Par contre, la solution alternative minimise seulement le changement dans les corrections. Graphiquement, cela consiste à tracer à travers les écarts annuels moyens une courbe qui soit la plus plate possible et qui recouvre aussi les mêmes surfaces annuelles que les écarts annuels moyens.

On peut faire le même raisonnement graphique et arriver à des conclusions identiques en comparant le modèle proportionnel de Denton au modèle proportionnel correspondant présenté plus bas. Dans le premier cas, la taille de la première correction se trouve minimisée mais non dans le second.

This was a trivial and ideal case which allowed the solution of constant corrections: All the average annual discrepancies, the differences between the annual benchmarks and the annual totals of the original series (divided by the number of months per year), were constant. However, Figure 2 displays a more realistic case, where the five average annual discrepancies vary about 200. As in the first example, the corrections derived from the Denton method are much less constant than those obtained from the other method, especially in the first year.

As explained below, Denton's method does not only minimizes the the change in the corrections but also the size of the first correction. This can be seen both in Figure 1 and 2, where the first corrections are close to zero. The alternative solution, on the other hand, only minimizes the change in the corrections. Graphically this consists of fitting a curve through the average annual discrepancies, which is as flat as possible and which spans the same annual surfaces as the average annual discrepancies.

The same graphical reasoning can be applied to the Denton proportional model compared to the corresponding proportional model presented below, and the identical conclusions are reached. The size of the first correction is minimized in the first case but not in the second.

2. DIFFÉRENCE ENTRE LA MÉTHODE PROPOSÉE ICI ET CELLE DE DENTON

Reprenant la formulation additive avec premières différences de Denton ainsi que sa notation, la série recherchée x_t minimise la fonction objective suivante

$$(1) \qquad p(x) = \sum_{t=1}^{n} (\Delta x_t - \Delta z_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} (\Delta (x_t - z_t))^2, \quad x_0 = z_0, \qquad (1)$$

sujette aux contraintes d'égalité entre les sommes annuelles des valeurs obtenues et les jalons disponibles y_t:

$$(2) \qquad \sum_{t=(i-1)k+1}^{ik} x_t = y_i, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad (2)$$

Denton justifie l'hypothèse $x_0=z_0$ en prétendant qu'il est légitime de supposer l'égalité des dernières valeurs observée et ajustée, antérieures à l'intervalle d'estimation. La fonction objective (1) signifierait donc que la série ajustée x_t devrait avoir la même pente que la série originale z_t; et, que par conséquent la pente des différences entre les deux séries devrait être minimisée (sujette aux contraintes). Un examen attentif de la situation révèle toutefois qu'il en va autrement.

On peut en effet récrire la fonction objective (1) de la manière suivante en substituant $x_0=z_0$:

$$(3) \qquad p(x) = (x_1 - z_1)^2 + \sum_{t=2}^{n} (\Delta (x_t - z_t))^2. \qquad (3)$$

Cette transformation met clairement en évidence que l'hypothèse $x_0=z_0$ implique la minimisation de la taille de la première correction. Comme illustré aux figures 1 et 2, la minimisation de la première correction tire la courbe de correction vers zéro en début de série. Cela produit une ondulation dans la première année qui se répercute sur les autres années. Cette ondulation inutile

2. DIFFERENCE BETWEEN THE METHOD PRESENTED HERE AND THAT OF DENTON

Resuming the additive first difference formulation of Denton as well as his notation, the desired series x_t minimizes the following objective function

$$(1) \qquad p(x) = \sum_{t=1}^{n} (\Delta x_t - \Delta z_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} (\Delta (x_t - z_t))^2, \quad x_0 = z_0, \qquad (1)$$

subject to the equality constraints between the annual sums of the values obtained and the available benchmarks.y_t:

$$(2) \qquad \sum_{t=(i-1)k+1}^{ik} x_t = y_i, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad (2)$$

Denton justifies hypothesis $x_0=z_0$ claiming that it is legitimate to assume the equality of the last fitted and observed values prior to the estimation interval. Objective function (1) would then mean that the adjusted series x_t should have the same slope as the original series z_t; and therefore, that the slope of the differences between the two series should be minimized (subject to the constraints). Examining the situation carefully reveals that such is not the case.

After substituting $x_0=z_0$, objective function (1) can indeed be rewritten as:

$$(3) \qquad p(x) = (x_1 - z_1)^2 + \sum_{t=2}^{n} (\Delta (x_t - z_t))^2. \qquad (3)$$

This transformation emphasizes that the assumption $x_0=z_0$ implies minimizing the size of the first correction. As illustrated in Figures 1 and 2, minimizing the first correction pulls the correction curve towards zero at the start of the series. This produces a wave in the first year which is transmitted to the other years. This useless wave

dans les corrections empêche, par définition, le parallélisme maximum des séries observée et ajustée.

La formulation proposée ici s'abstient tout simplement de l'hypothèse $x_0=z_0$ et donne la fonction objective suivante:

in the corrections prevents, by definition, the maximum paralleslism between the observed and adjusted series.

The formulation proposed here simply refrains from postulating $x_0=z_0$ and yields the following objective function

$$p(x) = \sum_{t=2}^{n} (\Delta (x_t - z_t))^2, \tag{4}$$

sujette aux mêmes contraintes qu'en (2).

subject to the same constraints in (2).

En algèbre linéaire, la fonction objective contrainte s'écrit

In linear algebra, the constrained objective function is written

$$\underline{u}(\underline{x},\underline{1}) = (\underline{x} - \underline{z})'\underline{A}\,(\underline{x} - \underline{z}) - 2\,\underline{1}'(\underline{y} - \underline{B}'\underline{x}), \tag{5}$$

où les vecteurs matrices impliqués valent:

where the vectors and matrices involved are:

$$\underset{n\times 1}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\underline{z}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \underset{m\times 1}{\underline{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \underset{m\times 1}{\underline{1}} = \begin{bmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ . \\ . \\ . \\ 1_m \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\underset{n\times n}{\underline{A}} = \underline{D}'\underline{D}, \quad \underset{(n-1)\times n}{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\underset{n\times m}{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{j} & 0 & \dots \\ 0 & \underline{j} & \dots \\ . & . & \\ . & . & \\ . & . & \end{bmatrix}, \quad \underset{k\times 1}{\underline{j}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, \quad (n=km) \tag{8}$$

Le vecteur $\underline{1}$ contient les multiplicateurs de Lagrange. Les variables n (=mk), m et k désignent respectivement le nombre d'observations et le nombre d'années dans la série et le nombre de mois par année.

Vector $\underline{1}$ contains the Lagrangian multipliers. Variables n (=mk), m and k respectively stand for the number of observations and of years in the series and the number of months per year.

Les équations normales associées à (5) sont

The normal equations associated with (5) are

$$(9) \qquad \begin{aligned} du / dx &= (A + A')(x - z) + 2 B l = 0 \\ du / dl &= 2 (B' x - y) = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

et débouchent sur la solution

and yield solution

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} x \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underset{(n+m)\times(n+m)}{W} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

La substitution de l'identité $y = B'z + r$, r renfermant les écarts annuels, donne

Substituting identity $y = B'z + r$, where r contains the m annual discrepancies, gives

$$(11) \qquad \begin{bmatrix} x \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ r \end{bmatrix} = \underset{\substack{[n\times n \quad n\times m] \\ [m\times n \quad m\times m]}}{\begin{bmatrix} I & W_x \\ 0 & W_l \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow x = z + W_x r. \qquad (11)$$

Cette reformulation de la solution réduit le temps de calcul dans l'application des poids calculés comparativement à la formulation (10). À remarquer aussi qu'une fois obtenus, les poids W_x peuvent servir pour un nombre quelconque de séries ayant le même nombre d'observations. Nous recommandons en outre (Cholette, 1978, section 6; 1979, 4.3) de calculer W_x pour un intervalle quinquennal et de l'utiliser à la manière d'une moyenne mobile (se mouvant d'une année à la fois) pour les séries de cinq ans et plus. En plus d'économiser les calculs, ce procédé n'engendre que deux révisions des estimés (ceteris paribus) lorsque d'autres années d'observations s'ajoutent à la série.

This reformulation of the solution reduces computing time in the application of the calculated weights compared to formulation (10). Aslo note that once the weights W_x are obtained, they can be used for any number of series having the same number of observations. Furthermore, we recommend (Cholette, 1978, section 6; 1979, 4.3) to compute W_x for a 5-year interval and to use it in a moving average manner (moving one year at the time) for series of 5 years and more. Apart from saving on calculations, this procedure generates only two revisions in the estimates (ceteris paribus) when new years of observations are added to the series.

Denton résout l'inversion de l'équation (10) par partie. Cela est impossible car la matrice A est singulière. Par contre, l'ensemble de la matrice n'est pas singulier et s'inverse.

Denton solves the inversion in equation (10) by parts. This is impossible here since matrix A is singular. The overal matrix however is not singular and can be inverted.

En un sens, la solution livrée ici n'est pas nouvelle. Il s'agit en fait de la méthode que Boot, Feibes et Lisman (1967) proposaient pour interpoler entre des données annuelles en l'absence d'information infra-annuelle. La solution (11) consiste exactement à interpoler entre les écarts annuels avec leur méthode et à ajouter les estimés obtenus

In a sense, the solution developped herein is not new. It is in fact the method proposed by Boot, Feibes and Lisman (1967) to interpolate between annual data in the absence of sub-annual information. Solution (11) exactly consists in interpolating between annual discrepancies with their method and in

(les corrections) à la série infra-annuelle originale.

3. VARIANTE PROPORTIONNELLE

La méthode proportionnelle maintenant présentée est plus nouvelle, bien qu'il s'agisse aussi d'une variante de la méthode proportionnelle de Denton (dont on a retiré $x_0=z_0$).

Comme dans la section 2, la fonction objective minimise toujours la somme des différences quadratiques de pente entre les séries infra-annuelles originale et recherchée (z_t et x_t). Mais chaque terme de la somme est pondéré par la valeur de l'observation infra-annuelle correspondante:

adding the resulting estimates (the corrections) to the original subannual series.

3. PROPORTIONAL VARIANT

The proportional method now presented in this section is newer, although it is also a variant of Denton's proportional method (from which $x_0=z_0$ was removed).

As in Section 2, the objective function still minimizes the sum of the squared differences between the slopes of the original and desired sub-annual series (z_t and x_t). Each term in the sum is weighted however by the value of the corresponding sub-annual observation:

$$(12) \qquad p(x) = \sum_{t=2}^{n} (\Delta (x_t - z_t) / z_t)^2 = \sum_{t=2}^{n} (\Delta (x_t / z_t))^2. \qquad (12)$$

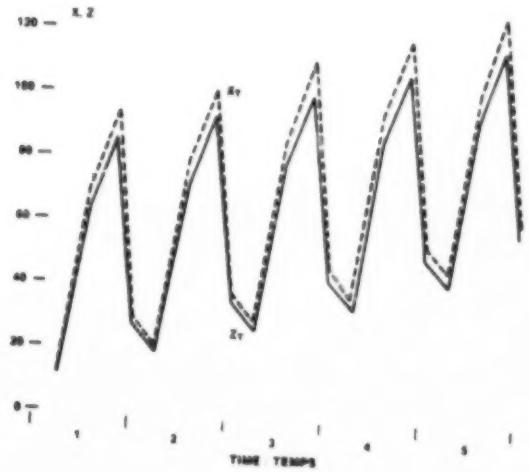

Figure 3: Série originale (ligne continue) et série ajustée aux jalons (tirets) selon la variante proportionnelle de la méthode d'étalonnage proposée dans ce travail (en régime d'écarts annuels proportionnels constants)

Figure 3: Original series (solid curve) and benchmarked series (dashed) according to the proportional variant of the benchmarking method proposed in this paper (in a situation of constant annual proportional discrepancies)

Cette variante convient aux séries à forte saisonnalité, lorsqu'on juge que les mois de creux saisonnier ne peuvent être aussi responsables de l'écart annuel que les mois de sommet saisonnier: La taille de chaque correction est proportionnelle au niveau de l'observation, comme illustré dans la figure 3. Les corrections proportionnelles z_t/z_t sont aussi constantes que les écarts annuels le permettent. Toutes les observations doivent être positives, et la méthode assure que les valeurs ajustées seront aussi toutes positives.

On peut également démontrer (Cholette, 1978, section 3; 1979,3) que la variante proportionnelle est une approximation linéaire de la méthode fortement non linéaire de préservation des taux de croissance (Smith, 1977) qui aurait la fonction objective suivante:

$$p(x) = \sum_{t=2}^{n} (x_t / x_{t-1} - z_t / z_{t-1})^2. \qquad (13)$$

L'approximation est exacte en régime d'écarts annuels proportionnels constants sur l'intervalle d'estimation.

En algèbre linéaire, la fonction objective contrainte associée à la méthode proportionnelle s'écrit

$$\underline{u}(\underline{x},\underline{1}) = (\underline{x} - \underline{z})' \underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1} (\underline{x} - \underline{z}) - 2\,\underline{1}'(\underline{y} - \underline{B}'\,\underline{x}), \qquad (14)$$

où Z^{-1} est une matrice diagonale dont les éléments sont $1/z_1$, $1/z_2$, ... La solution a la même structure que la variante additive ($\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1}$ remplaçant $\underline{A}$ dans (11)) et s'écrit:

$$\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{\ }\\ \underline{1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1} & \underline{B}\\ \underline{\ } & \underline{\ }\\ \underline{B}' & \underline{0}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1} & \underline{0}\\ \underline{\ } & \underline{\ }\\ \underline{B}' & \underline{I}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{z}\\ \underline{\ }\\ \underline{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{I} & \underline{W}_x\\ \underline{\ } & \underline{\ }\\ \underline{0} & \underline{W}_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{z}\\ \underline{\ }\\ \underline{r}\end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Contrairement à ceux de la variante additive, on doit cependant calculer les poids W_x de la solution proportionnelle pour chaque série et même chaque intervalle d'application d'une série donnée.

This variant is suitable for series with strong seasonality, when it is thought that seasonal trough months cannot account for the annual discrepancy as much as seasonal peak months: The size of the corrections are proportional to the level of each observation, as illustrated in Figure 3. The proportional corrections x_t/z_t are as flat as permitted by the annual discrepancies. All observations must be positive, and the method insures that all the adjusted values will also be positive.

It can also be shown (Cholette, 1978, Section 3; 1979,3) that the proportional variant is a linear approximation of the strongly non-linear growth rate preservation method (Smith, 1977), which would have the following objective function:

$$p(x) = \sum_{t=2}^{n} (x_t / x_{t-1} - z_t / z_{t-1})^2. \qquad (13)$$

The approximation is exact in situations of constant annual proportional discrepancies on the estimation interval.

In linear algebra, the constrained objective function associated to the proportional method is

$$\underline{u}(\underline{x},\underline{1}) = (\underline{x} - \underline{z})' \underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1} (\underline{x} - \underline{z}) - 2\,\underline{1}'(\underline{y} - \underline{B}'\,\underline{x}), \qquad (14)$$

where z^{-1} is a diagonal matrix with elements $1/z_1$, $1/z_2$, ... The solution has the same structure as the additive variant ($\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1}$ replacing $\underline{A}$ in (11)) and writes:

$$\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{\ }\\ \underline{1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1} & \underline{B}\\ \underline{\ } & \underline{\ }\\ \underline{B}' & \underline{0}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}^{-1} & \underline{0}\\ \underline{\ } & \underline{\ }\\ \underline{B}' & \underline{I}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{z}\\ \underline{\ }\\ \underline{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{I} & \underline{W}_x\\ \underline{\ } & \underline{\ }\\ \underline{0} & \underline{W}_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\underline{z}\\ \underline{\ }\\ \underline{r}\end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Unlike the weihgts in the additive variant however, weights W_x of the proportional solution must be computed for each series and even for each application interval of a given series.

4. SÉRIES DE STOCKS ET D'INDICE

Les variantes additive et proportionelle de la méthode présentée ci-dessus sont conçues pour des séries de flux, dont la valeur annuelle correspond à la somme des valeurs infra-annuelles. On peut très facilement adapter les solutions trouvées aux séries de stock ou cumulatives, dont la valeur annuelle n'est associée qu'à une seule valeur infra-annuelle (habituellement celle du dernier mois); ainsi qu'aux séries d'indice, dont la valeur annuelle correspond à la moyenne des valeurs infra-annuelles. Pour une série trimestrielle cumulative par exemple, il suffit tout simplement de redéfinir le vecteur $\underset{1x4}{j}$, composante de $\underset{4x4}{B}$, comme ceci

$$\underset{1x4}{j'} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1];$$

et, pour une série mensuelle d'indice comme ceci

$$\underset{1x12}{j'} = [1/12 \quad 1/12 \quad .... \quad 1/12].$$

4. STOCK AND INDEX SERIES

The additive and proportional variants of the method presented above are designed for flow series, whose annual values correspond to the sum of the sub-annual values. The solutions can very easily be adapted for stock series, whose annual values are associated to only one sub-annual value (usually that of the last month); and for index series, whose annual values correspond to the average of the sub-annual values. For a quarterly stock series, for instance, one merely has to redefine the component vector $\underset{1x4}{j}$ of matrix $\underset{4x4}{B}$ as

and, for monthly index series as

5. DISCUSSION

- Données "historiques" - Il y a selon nous beaucoup de confusion quant à l'interprétation de l'hypothèse $x_0=z_0$ de Denton. L'auteur écrit à ce sujet: "On suppose qu'il n'y a pas d'ajustement à faire à la série originale pour les années extérieures à l'intervalle allant des années 1 à m inclusivement." (p. 100, au dessus de l'équation 3.2, notre traduction).

Si on laisse ces années intactes parce qu'elles n'ont jamais eu de repères annuels, la solution proposée par Denton est défendable: il n'en découle aucune correction pour les années -1 et 0; et, de petites corrections graduellement introduites au début de l'année 1. (On se souvient que $x_0=z_0$ implique la minimisation de la première correction.) La série ajustée résultante est donc continue, comme illustré à la figure 4 par la courbe ADEB.

5. DISCUSSION

- "Historical" data - There is a lot of confusion regarding the interpretation of assumption $x_0=z_0$ of Denton. In that respect, the author writes: "It is assumed that no adjustments are to be made to the original series for years outside the range from year 1 to m, inclusive." (p. 100, above equation (3.2)).

If these years are left untouched because they never had any benchmarks, the solution proposed by Denton is defendable: No corrections result for years -1 and 0; and small and gradually introduced corrections, at the start of year 1. (Remember that $x_0=z_0$ implies minimizing the first correction.) The resulting adjusted series is then continuous as illustrated in Figure 4 by curve ADEB.

Par contre, si on laisse intactes les premières années parce qu'elles ont déjà été ajustées aux jalons et qu'on les considère maintenant comme "historiques", nous ne sommes pas d'accord avec l'hypothèse $x_0=z_0$. Généralement en effet, celle-ci produira une discontinuité entre les années 0 et 1 comme illustré dans figure 4 par la courbe A'CDEB. Les années -1 et 0 ont déjà reçu des corrections de taille voisine de CD, tandis que le début de l'année 1 reçoit des corrections les plus petites possibles.

Pour rendre immuables les données historiques après un certain nombre d'années, deux solutions sont possibles. La première consiste à spécifier explicitement la contrainte d'immuabilité dans la fonction objective qui devient

However, if the first years are left untouched because they were already benchmarked and are now considered as "historical", we do not agree with assumption $x_0=z_0$. Indeed, this assumption will generally produce a discontinuity between years 0 and 1, as shown in Figure 4 by curve A'CDEB. Years -1 and 0 have already received corrections of magnitude around CD, whereas the start of year 1 receives corrections which are as small as possible.

In order to "freeze" the historical data after a certain number of years, two solutions are possible. First, one can explicitely specify the freezing constraint in the objective function which becomes

$$p(x) = ((x_1 - z_1) - (x_0 - z_0))^2 + \sum_{t=2}^{n} (\Delta (x_t - z_t))^2, \qquad (16)$$

où (x_0-z_0) est connu et égal à la dernière correction calculée pour l'année historique 0. Cette correction est généralement différente de zéro (Cholette, 1979b). Cette spécification équivaut à déterminer le point de départ de la courbe de correction.

where (x_0-z_0) is known and is equal to the last correction calculated for historical year 0. This correction is generally not equal to zero (Cholette, 1979b). This specification amounts to determining the starting point of the correction curve.

Une deuxième solution, moins spécifique mais aussi efficace, consiste à appliquer la méthodologie déjà proposée dans ce travail (version additive ou proportionnelle) à la manière d'une moyenne mobile se mouvant annuellement. Avec un intervalle quinquennal d'application, les estimés deviennent automatiquement définitifs après deux années de révision; et, après une année, en régime triennal (Cholette, 1978, section 6 a; 1974, 4.3). La série ajustée aux jalons résultante est également continue, comme l'illustre la courbe A'CB de la figure 4.

Second, a less specific but equally effective solution consists in applying the methodology already proposed in this paper (additive or proportional versions) as a moving average, which moves one year at the time. With a 5-year estimation interval, for instance, the estimates automatically become final after two years of revision; and, after one year, in the case of a 3-year interval (Cholette, 1978, section 6 a; 1979, 4.3). The resulting benchmarked series is continuous, as illustrated in Figure 4 by curve A'CB.

- Mise en oeuvre - Les praticiens de l'étalonnage ont tendance à soumettre au programme d'étalonnage (Cholette, 1982)

-Implementation - The practioners of benchmarking have a tendency to feed to the benchmarking programme

les années de données déjà ajustées aux jalons suivie d'une année de données non ajustées (accompagnées de leurs jalons annuels). Pour des méthodologistes, il est évident qu'il faut toujours soumettre les données non ajustées (avec leurs jalons). On peut démontrer (Cholette, 1978, section 6b) que la soumission de données ajustées provoquera un mouvement saisonnier artificiel dans la série ajustée résultante.

- Étalonnage préliminaire des données courantes - Finalement une dernière remarque s'impose. Pendant une année (in-

(Cholette, 1982) the already benchmarked years of data followed by one year of unbenchmarked data (accompanied with their benchmarks). For methodologists, it is obvious that one must always submit the unbenchmarked data (with the yearly benchmarks). It can be proven (Cholette, 1978, Section 6b) that feeding benchmarked data will induce an artificial seasonal movement in the resulting benchmarked series.

- Preliminary benchmarking of current data - A final comment. During a current (uncompleted) year,

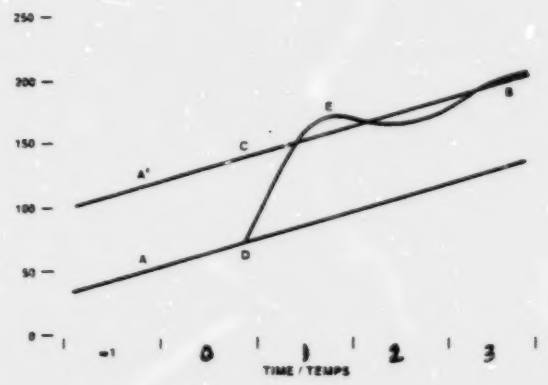

Figure 4: Séries ajustées aux jalons selon la méthode de Denton, en l'absence de jalons pour les années -1 et 0 (courbe ADEB) et en présence de jalons annuels et d'ajustement préalable pour les années -1 et 0 (A'CDEB); et selon la méthode proposée dans ce travail, appliquée à la manière d'une moyenne mobile, en présence de jalons annuels pour les années -1 et 0 (A'CB)

Figure 4: Benchmarked series according to Denton's method, when there are no benchmarks for year -1 and 0 (curve ADEB) and when there are benchmarks and year -1 and 0 were already benchmarked (A'CDEB); and according to the method proposed in this paper, applied in a moving average manner, when there benchmarks for years -1 and 0 (A'CB)

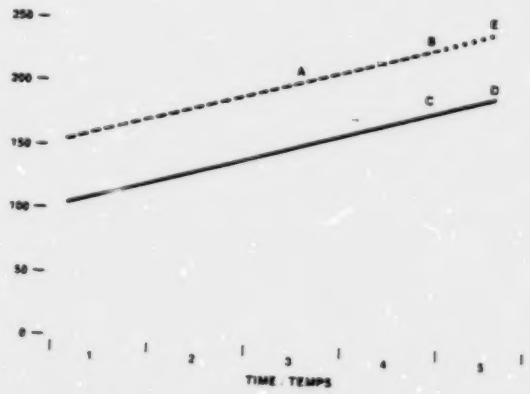

Figure 5: Continuity between the benchmarked series (dashed curve) and the preliminarily benchmarked series (dotted) and discontinuity BC between the benchmarked (dashed) and the unbenchmarked (solid) series

Figure 5: Continuité entre la série ajustée aux jalons (ligne en tirets) et la série préliminairement ajustée (pointillée) et discontinuité BC entre les séries ajustée (tirets) et non ajustée (continue)

complète) en cours, on ne peut pas calculer des taux de croissance, par exemple, entre le segment de la série ajustée aux jalons (AB) avec le segment non ajusté (CD). Ce faire produit généralement une discontinuité BC entre les deux segments AB et CD, comme illustré dans figure 5 par la courbe ABCD.

Deux issues s'offrent alors. Premièrement, on fait les comparaisons intertemporelles en se basant seulement sur les données non ajustées. Deuxièment, on effectue un ajustement préliminaire des données courantes, en répétant la dernière correction BC pour l'année en cours. (À noter que l'incorporation de l'année incomplète courante dans la fonction objective (4) (ou 12) produirait des valeurs ajustées préliminaires identiques.) On peut ensuite comparer le segment ajusté AB avec le segment préliminairement ajusté BE, comme illustré dans la figure 5 par le courbe ABE. Nous favorisons cette deuxième alternative.

one cannot calculate growth rates, for instance, between the benchmarked segment of the series (AB) and the unbenchmarked segment (CD). Doing so usually produces a discontinuity BC between the two segments AB and CD as illustrated in Figure 5 by curve ABCD.

Two solutions are then possible. One, the inter-temporal comparisons are based only on the unbenchmarked data. Two, the current data are preliminarily benchmarkecd by repeating the last available correc tion BC for the current year. (Note that including the incomplete current year in the objective function (4) (or 12) would yield identical preliminarily benchmarked values.) One can then compare the benchmarked segment AB with the preliminarily benchmarked segment BE as illustrated in Figure 5 by curve ABE. We favour this second alternative.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Ce travail a proposé une modification de la méthode d'étalonnage de Denton, qui rend les séries originale et ajustée aux jalons annuels plus parallèles l'une à l'autre que ce n'est le cas avec la méthode originale. Cette amélioration vaut autant pour les variantes additive que proportionnelle.

On peut tout aussi facilement adapter la méthode proposée aux séries de flux, de stock et d'indice.

Avant de procéder à des comparaisons inter-temporelles entre les données ajustées et les nouvelles données courantes, il est essentiel d'ajuster aux jalons de manière préliminaire les données courantes (de la façon proposée).

SUMMARY AND CONCLUSIONS

This paper suggested a modification to the benchmarking method of Denton (1971) which makes the original and benchmarked series more parallel than is the case with the original method. This improvement holds both for the additive and the proportional variants of the method.

The method proposed can very easily be adapted for flow, stock as well as index series.

Before making intertemporal comparisons between the benchmarked and current data, it is essential to preliminarily benchmark the current data (in the manner proposed).

Telle que proposée, la méthode de Denton n'est pas convenable, si on veut laisser intactes les années passées dite "historiques" déjà ajustées aux jalons.

If it is intended to "freeze" the past so-called "historical" estimates which were already benchmarked, the method as proposed by Denton is unappropriate,

BIBLIOGRAPHIE / REFERENCES

1. Baldwin, A. (1978), "New Benchmarking Algorythms using Quadratic Minimization", National Product Division, **Statistics Canada,** Research Paper.

2. Bassie, B.L. (1939), "Interpolation Formulae for the Adjustment of Index Numbers", **Proceedings of the Annual Meetings of the American Statistical Association.**

3. Boot, J.C.G., Feibes, W., Lisman, J.H.C. (1967), "Further Methods of Derivation of Quarterly Figures from Annual Data", **Applied Statistics,** Vol. 16, No. 1, pp. 65-75.

4. Cholette, P.A. (1978), "Comparaison et évaluation de quelques méthodes d'ajustement de séries infra-annuelles aux repères annuels / A Comparison and Assessment of Various Adjustment Methods of Sub-Annual Series to Yearly Benchmarks", Recherche et analyse des chroniques, **Statistique Canada,** document de recherche 78-03-001B, 47 p.; Time Series Research and Analysis, **Statistics Canada,** Research Paper 78-03-001B, 47 p.

5. Cholette, P.A. (1979a), "Adjustment Methods of Sub-Annual Series to Yearly Benchmarks", **Proceedings of the Computer Science and Statistics, 12th Annual Symposium on the Interface,** J.F. Gentleman Ed., University of Waterloo, pp. 358-362.

6. Cholette, P.A. (1979b), "A Note of 'Freezing' Past Estimates when Benchmarking", Time Series Research and Analysis, **Statistics Canada,** Research Paper 79-06-002E, 3 p.

7. Cholette, P.A. (1982), "Minimum Quadratic Adjustment Program (MQAP-I) of Series to Annual Totals - Users Manual / Programme d'ajustement quadratique minimum (PAQM-I) de séries aux totaux annuels - Manuel des utilisateurs", Time Series Research and Analysis, **Statistics Canada,** 82-11-003B; Recherche et analyse des chroniques, **Statistique Canada,** 82-11-003B.

8. Cholette, P.A. (1983), "Étalonnage de séries en régime de jalons bi-annuels et de connaissance du point d'arrivée / Benchmarking Series with bi-annual Benchmarks when Knowing the ending point", Recherche et analyse des chroniques, **Statistique Canada,** document de recherche 83-05-002B; Time Series Research and Analysis, - **Statistics Canada,** Research Paper 83-05-002B.

9. Chow, G.C., Lin, An-loh (1971), "Best Linear Unbiased Interpolation, Distribution and Extrapolation of Time Series by Related Series", **Review of Economics and Statistics,** Vol. 53, No. 4, pp. 372-375.

10. Dagum, E.B. (1977), "Comparison of Various Interpolation Procedures for Benchmarking Economic Time Series", Time Series Research and Analysis, **Statistics Canada,** Research Paper 77-05-006E.

11. Denton, F.T. (1971), "Adjustment on Monthly or Quarterly Series to Annual Totals: An Approach Based on Quadratic Minimization", **J.A.S.A.,** Vol. 66, No. 333, pp. 99-102.

12. Friedman, M. (1962), "The Interpolation of Time Series by Related Series", **J.A.S.A.,** Vol. 57, No. 300, pp. 729-757.

13. Glejser, H. (1966), "Une méthode d'évaluation de données mensuelles à partir d'indices trimestriels ou annuels", **Cahiers Economiques de Bruxelles,** No. 19, 1er trimestre, pp. 45-64.

14. Huot, G. (1975), Quadratic Minimization of Monthly Estimates to Annual Totals, Time Series Research and Analysis, **Statistics Canada,** Research Paper 75-11 010E.

15. Lisman, J.H.C., Sandee, J. (1964), "Derivation of Quarterly Figures from Annual Data", **Applied Statistics,** Vol. 13, No. 2, pp. 87-90.

16. Smith,P. (1977), "Alternative Method for Step Adjustment", Current Economic Analysis Division, **Statistics Canada,** Research Paper.

17. Somermeyer, W.H, Jansen, R., Lauter, A.S. (1976), "Estimating Quarterly Values from Annually Known Variables in Quarterly Relationships", **J.A.S.A,** Vol. 71, No. 355, pp. 588-595.